B. PRAVDĚPODOBNOST

1. Náhodné pokusy, možné výsledky, pravděpodobnost výsledku

PRAVDĚPODOBNOST – zabývá se matematickými zákonitostmi, které se projevují (při dostatečně velkém počtu pokusů) v náhodných pokusech

NÁHODNÉ POKUSY – pokusy, které při dodržení předepsaných podmínek mohou vést k různým výsledkům (závisí i na náhodě)

– KLASICKÉ: slosování loterie, tahy sportky, hody kostkou nebo mincí, míchání karet

– JINÉ (v praxi důležité): zjišťování účinků nového léku, výnosu nové odrůdy plodiny,...

MOŽNÉ VÝSLEDKY – ozn. ω

– předp., že jsme schopni je předem všechny určit (je jich KONEČNÝ POČET) tak, že se NAVZÁJEM VYLUČUJÍ (nastane-li jeden, nemůže nastat druhý) a JEDEN Z VÝSLEDKŮ NASTANE VŽDY

MNOŽINA MOŽNÝCH VÝSLEDKŮ – zn. Ω

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m\}$ $\qquad m$ ... počet možných výsledků (konečné číslo)

Příklady

① Zkoumáme, zda při hodu 3 mincemi, které umíme rozlišit, padne rub nebo líc mince. Zapište všechny možné výsledky.

$\underbrace{\Omega}_{\text{množina možných výsledků}} = \{LLL, LLR, \underbrace{LRL, RLL, RRL, RLR, LRR}_{\text{možné výsledky}}, RRR\}$ $\qquad \underbrace{m = 8}_{\text{počet možných výsledků}}$

– vybr. uspoř. trojice (zál. na pořadí) ze 2 prvků L R s opak. => $V'(k,n) = n^k$

=> VARIACE 3členné ze 2 prvků s opak. => $m = V'(3,2) = 2^3 = 8$

② Ve třídě o 28 žácích vyberte losem 4 žáky. Určete počet možných výsledků losování, jestliže

a) závisí i na jejich pořadí

počet čtveřic z 28 bez opak., záleží na pořadí

=> $m = V(4,28) = 28.27.26.25$

b) nezávisí na jejich pořadí

počet čtveřic z 28 bez opak., nezáleží na pořadí

=> $m = K(4,28) = \binom{28}{4} = \frac{28.27.26.25}{4.3.2.1}$

③ V prvním osudí je bílá a červená koule, v druhém bílá, červená a modrá koule. Volíme jedno z osudí a z něj táhneme jednu kouli. Vypište všechny možné výsledky, zajímá-li nás jak číslo zvoleného osudí, tak i barva tažené koule.

$\Omega = \{(1,b), (1,c), (2,b), (2,c), (2,m)\}$ $\qquad m = 5$

PRAVDĚPODOBNOST VÝSLEDKU ω (z množiny všech možných výsledků Ω) – zn. $p(\omega)$

– využijeme-li statistiku (provádíme *n*krát pokus) n ... počet pokusů

$$p(\omega) \doteq \frac{n(\omega)}{n}$$

$n(\omega)$ ... četnost výsledku ω (kolikrát nastal tento výsledek)

$\frac{n(\omega)}{n}$ ... RELATIVNÍ ČETNOST VÝSLEDKU ω v n pokusech

– POKUD JSOU VÝSLEDKY STEJNĚ MOŽNÉ (PRAVDĚPODOBNÉ)

$p(\omega) = \frac{1}{m}$ pro $\forall\, \omega \in \Omega$ *m* ... počet možných výsledků množiny Ω

PLATÍ:

$p(\omega_1) + p(\omega_2) + \ldots + p(\omega_m) = 1$ součet pravděpodobností všech výsledků ω je roven 1

$n(\omega_1) + n(\omega_2) + \ldots + n(\omega_m) = n$ součet četností výsledků je roven počtu pokusů

$[n(\omega) \in N_0 \quad \frac{n(\omega)}{n} \in Q_0^+ \text{ (racion.)}]$

Příklady

④ Házíme 50krát kostkou

ω	1	2	3	4	5	6
$n(\omega)$	10	6	8	12	0	14
$p(\omega) = \frac{n(\omega)}{n}$	0,20	0,12	0,16	0,24	0,00	0,28

⑤ Hod ideální kostkou, stejně pravděpodobné výsledky

$m = 6 \quad \Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$p(\omega) = \frac{1}{m} = \frac{1}{6}$

⑥ Hod mincí (rub, líc), stejně pravděpodobné výsledky

$p(R) = p(L) = \frac{1}{2}$

⑦ Tah 6 čísel (1. výhra) ze 49 ve Sportce (všechny stejně pravděpodobné)

$p(\omega) = \frac{1}{m} = \frac{1}{\binom{49}{6}} = 0{,}000\,00072$

$m = K(6,49) = \binom{49}{6}$
6tice, na pořadí nezáleží, bez opak., ze 49 => $K(6,49)$

⑧ V tombole je 100 losů, z nichž bude vylosováno 10 vyhrávajících losů. Jaké jsou možné výsledky losování a jaké mají pravděpodobnosti.

stejně pravděpodobné
$m = K(10,100)$
desetice ze 100
nez. na pořadí

$p(\omega) = \frac{1}{m} = \frac{1}{\binom{100}{10}} \doteq 6 \cdot 10^{-14}$

⑨ Ze statistické ročenky (mezi živě narozenými dětmi v ČR)

– relativní četnost narození chlapců ... 0,516 $= p(\omega_1)$

– relativní četnost narození dívek ... 0,484 $= p(\omega_2)$

$p(\omega_1) + p(\omega_2) = 1$